เฉลย Pre – Test วิชา Digital Design

1. การกระโดดของกระต่ายสามารถเทียบเคียงได้กับเลขฐาน 2 โดยที่ครั้งที่ *n+1* ของการกระโดด จะได้ระยะทางเป็นครึ่งหนึ่งของ การกระโดดครั้งที่ *n* หมายความว่า เราสามารถใช้วิธีการ **Repeated Subtraction** ของการคำนวณเลขฐาน 2 ในการหารูปแบบของการกระโดดได้ดังนี้

   ข้อ 1.1 (ก)

ครั้งที่	กระโดดได้ไกลสุด	ระยะทางที่เหลือ	ค่าประจำหลักของเลขฐาน 2	กระโดด?
1	**128**	29	0	อยู่กับที่
2	128 / 2 = **64**	29	0	อยู่กับที่
3	64 / 2 = **32**	29	0	อยู่กับที่
4	32 / 2 = **16**	29	**1** ($16 \le 29$)	**กระโดด**
5	16 / 2 = **8**	29 – 16 = 13	**1** ($8 \le 13$)	**กระโดด**
6	8 / 2 = **4**	13 – 8 = 5	**1** ($4 \le 5$)	**กระโดด**
7	4 / 2 = **2**	5 – 4 = 1	0	อยู่กับที่
8	2 / 2 = **1**	1	1 ($1 \le 1$)	**กระโดด**
9	1 / 2	**1 – 1 = 0**	-	หยุดนิ่ง

   ดังนั้นรูปแบบการกระโดดของกระต่ายจึงเป็น อยู่กับที่, อยู่กับที่, อยู่กับที่, *กระโดด*, *กระโดด*, *กระโดด*, อยู่กับที่, *กระโดด*, และ หยุดนิ่ง (เพราะระยะทางที่เหลือเป็น 0 พอดี) หรือเทียบเท่ากับเลขฐาน 2 ของ 29 (0001 1101) นั่นเอง

   ข้อ 1.1 (ข)

   กระต่ายกลับหลังหัน เริ่มกระโดดใหม่ อยู่กับที่ 5 ครั้ง และไปข้างหน้า 1 ครั้ง เทียบเท่ากับเลขฐานสิบ คือ **0000 0**100 (0 จำนวน5 ตัว ตามด้วย 1 จำนวน 1 ตัว ส่วน เลข 0 สองหลักสุดท้ายแสดงถึงว่ากระต่ายหยุดกระโดดแล้ว ไม่นำระยะทางมาคิด)

   เมื่อแปลงเป็นเลขฐาน 10 ได้เป็น 4 แสดงว่ากระต่ายกระโดดกลับหลังไป 4 ซม. หรือ คิดเป็นการกระจัดเท่ากับ 29 – 4 = **25 ซม**.

   ข้อ 1.2 (ก) $(11.01)_2 - (1.001)_2 = (X)_{10}$

   เติมเลข 0 ให้มีจำนวนของบิตเท่ากัน 11.010 และ 01.001
   เพิ่ม bit เครื่องหมาย ดึงจุดทศนิยมออก 011 010 และ 001 001
   แปลงตัวตั้งเป็น 2's complement จาก 001 001 เป็น 110 110 + 1 = 110 111
   บวกตัวตั้ง และตัวลบเข้าด้วยกัน 011 010 + 110 111 = 1 010 001
   ตัดหลักตัวทด ใส่จุดทศนิยมกลับที่เดิม 010.001 = X = **2.125**

   ข้อ 1.2 (ข) $(X)_{16} = (1001)_3$

   แปลงเลขฐาน 3 เป็นฐาน 10 ก่อน $1\times3^3 + 1\times3^0 = 27 + 1 = (28)_{10}$
   แปลงเลขฐาน 10 เป็นฐาน 16 ด้วยวิธีหาร 28 ÷ 16 = 1 เหลือเศษ 12
   เหลือเศษน้อยกว่า 16 ดังนั้นมีสองหลัก 1 และ 12 (แทนเลข 12 ด้วย C)
   ดังนั้น X เท่ากับ **1C**

2. วิเคราะห์วงจรที่ output ของ switch แต่ละตัว
   เขียนตารางค่าความจริงที่จุด DX (output ของ switch S1)

X	Y	DX
0	0	D0 = VCC = **1**
0	1	D0 = VCC = **1**
1	0	D1 = Y = **0**
1	1	D1 = Y = **1**

เขียนตารางค่าความจริงที่ output ของ switch S2 และ S3 ยกค่า DX และ Y มาจากตารางข้างบน

DX	Y	CT (S4)
1	0	S3 เปิดวงจรไม่มีกระแสไหล $\rightarrow$ **1**
1	1	S2 S3 ปิดวงจรมีกระแสไหล $\rightarrow$ **0**
0	0	S2 S3 เปิดวงจรไม่มีกระแสไหล $\rightarrow$ **1**
1	1	S2 S3 ปิดวงจรมีกระแสไหล $\rightarrow$ **0**

เขียนตารางค่าความจริงที่ S4 ยกค่า CT (S4) จากตารางข้างบน

CT (S4)	OUT
1	ปิดวงจร มีกระแสไหล $\rightarrow$ **0**
0	เปิดวงจร ไม่มีกระแสไหล $\rightarrow$ **1**
1	ปิดวงจร มีกระแสไหล $\rightarrow$ **0**
0	เปิดวงจร ไม่มีกระแสไหล $\rightarrow$ **1**

2.1 ดังนั้นตารางค่าความจริงของ OUT เทียบกับ X, Y คือ

X	Y	OUT
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

2.2 เขียนในรูป SOP โดยดูจาก minterm ที่ให้ OUT = 1 ได้แก่ $\overline{X}\cdot Y + X\cdot Y$

2.3 เขียนในรูป POS โดยดูจาก maxterm ที่ให้ OUT = 0 ได้แก่ $(X+Y)\cdot(\overline{X}+Y)$

3. ลดรูปฟังก์ชันโดยใช้ ทฤษฎีบท Boolean

3.1 $OUT = \overline{B}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C}$

$$\begin{aligned} OUT &= \overline{B}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C} \\ &= (1+A)\cdot\overline{B}\cdot D + B\cdot\overline{C}\cdot(\overline{A}+A) \\ &= \overline{B}\cdot D + B\cdot\overline{C} \end{aligned}$$

3.2 $\overline{OUT} = W\cdot X\cdot Y + \overline{X}\cdot\overline{Z} + W\cdot X\cdot Z$

สมการนี้ไม่สามารถลดรูปต่อไปได้อีกแล้ว (ลองเขียนเป็น K-Map ดูจะเห็นว่าไม่สามารถวงกลมล้อมรอบ 1 ได้น้อยกลุ่มกว่านี้อีก (ถ้าข้อไหนสงสัยใช้ K-Map พิสูจน์ได้)**

ถ้าแก้สมการโจทย์ใหม่ เป็น $\overline{OUT} = W\cdot X\cdot Y + \overline{X}\cdot\overline{Z} + W\cdot X\cdot Z + W\cdot X\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z}$
สามารถดึงตัวร่วมได้เป็น (เพิ่มช่อง 1 ที่ขาดไปใน K-Map)

$$\begin{aligned} \overline{OUT} &= W\cdot X\cdot Y + W\cdot X\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z} + \overline{X}\cdot\overline{Z} + W\cdot X\cdot Z + W\cdot X\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z} \\ &= W\cdot X\cdot(Y+\overline{Y}\cdot\overline{Z}) + \overline{X}\cdot\overline{Z} + W\cdot X\cdot(Z+\overline{Y}\cdot\overline{Z}) \\ &= W\cdot X\cdot(Y+\overline{Z}) + \overline{X}\cdot\overline{Z} + W\cdot X\cdot(Z+\overline{Y}) \\ &= W\cdot X\cdot(Y+\overline{Z}+Z+\overline{Y}) + \overline{X}\cdot\overline{Z} \\ &= W\cdot X + \overline{X}\cdot\overline{Z} \\ OUT &= (\overline{W}+\overline{X})\cdot(X+Z) \end{aligned}$$

3.3 $OUT = A \cdot B \cdot (C \oplus D) + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{C} + D) \cdot (C + \overline{D})$

$$\begin{aligned} OUT &= A \cdot B \cdot (C \cdot \overline{D} + \overline{C} \cdot D) + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{C} + D) \cdot (C + \overline{D}) \\ &= A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (C \cdot \overline{C} + \overline{C} \cdot \overline{D} + C \cdot D + D \cdot \overline{D}) \\ &= A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \end{aligned}$$

สมการนี้ไม่สามารถลดรูปต่อไปได้อีกแล้ว (ลองเขียนเป็น K-Map ดูจะเห็นว่าไม่สามารถวงกลมล้อมรอบ 1 ได้น้อยกลุ่มกว่านี้อีก (ถ้าข้อไหนสงสัยใช้ K-Map พิสูจน์ได้)**

แต่จากการสังเกต (เปรียบเทียบจากตารางค่าความจริงของ C และ D) จะได้ว่า

$(\overline{C} + D) \cdot (C + \overline{D}) = \overline{C} \cdot \overline{D} + C \cdot D = \overline{(C \oplus D)}$ **ดังนั้น**

$OUT = A \cdot B \cdot (C \oplus D) + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{(C \oplus D)}$ **ถ้าให้** $X = (C \oplus D)$ **จะได้**
$OUT = A \cdot B \cdot X + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{X} = \overline{A \oplus B \oplus X} = \overline{A \oplus B \oplus C \oplus D}$

(X-OR ถ้าเหมือนกันจะได้ 0 ดังนั้น X-NOR ถ้าเหมือนกันจะได้ 1 *กรณี 3 อินพุทพิจารณาเหมือนกัน*)

4. จากข้อ 3.1
4.1 แปลงสมการให้อยู่ในรูป Canonical SOP

$$\begin{aligned} OUT &= \overline{B} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \\ &= (A + \overline{A}) \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{C}) \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot (D + \overline{D}) + \\ &\quad A \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{C}) \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot (D + \overline{D}) \\ &= A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \\ &\quad \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \\ &\quad A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \\ &\quad A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \end{aligned}$$

เพื่อป้องกันความสับสน เขียน minterm ในรูปเลขฐาน 2 โดยเรียงบิตดังนี้ A B C D
OUT = 1011 + 0011 +1001 + 0001 + 0101 + 0100 + **1011** + **1001** + 1101 + 1100

ตัดเทอมที่ซ้ำออก (ตัวหนา) แล้วแปลงกลับในรูป literals ของ A B C D

$$\begin{aligned} OUT = A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \\ \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \end{aligned}$$

4.2 เขียนวงจรในรูปของ multiplexer โดยกำหนดให้ อินพุทที่ให้ OUT เท่ากับ 1 (**minterm**) ต่อเข้า VCC และอินพุทที่ให้ OUT เท่ากับ 0 ต่อลง Ground ดังนั้น

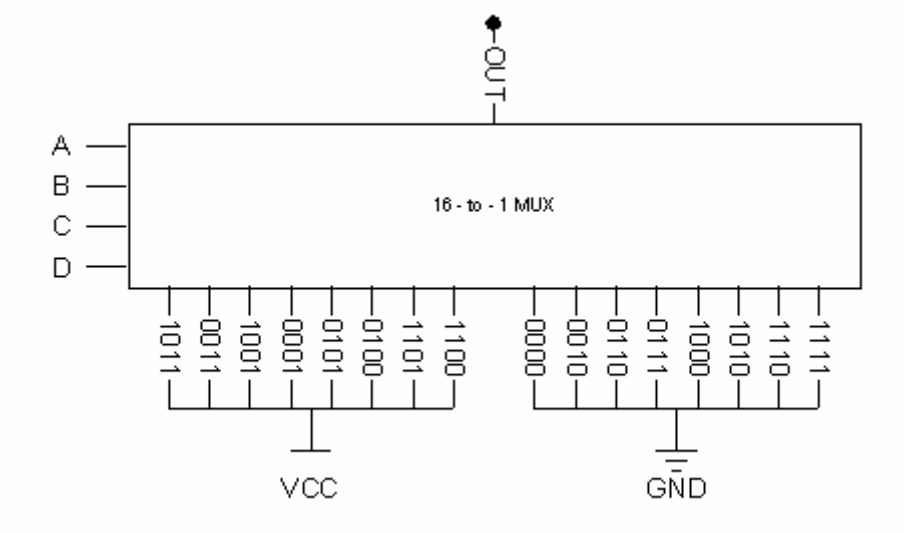
ขา Data ที่ ต่อเข้า VCC ได้แก่

1011 + 0011 +1001 + 0001 + 0101 + 0100 + 1101 + 1100

ขา Data ที่เหลือต่อลง Ground ได้แก่

0000, 0010, 0110, 0111, 1000, 1010, 1110, 1111

วาดวงจร Multiplexer (ให้ น.ศ. กลับไปดูที่มาของวงจร MUX ให้ละเอียด)



5. จากวงจร

5.1 เขียนสมการที่อธิบายวงจรนี้

$$OUT = \overline{\left(\overline{A}\cdot B\right)\cdot\left(C+D\right)}+\overline{\left(\overline{C}\cdot D\right)}$$

5.2 แปลงสมการที่ได้ในรูปของ Canonical SOP

$$\begin{aligned}
OUT &= \overline{\left(A+\overline{B}\right)\cdot\left(C+D\right)}+\left(C+\overline{D}\right)\\
&= \overline{\left(A+\overline{B}\right)}+\overline{\left(C+D\right)}+\left(C+\overline{D}\right)\\
&= \overline{A}\cdot B+\overline{C}\cdot\overline{D}+C+\overline{D}\\
&= \overline{A}\cdot B+\overline{D}\\
&= \overline{A}\cdot B\cdot\left(C+\overline{C}\right)\cdot\left(D+\overline{D}\right)+\left(A+\overline{A}\right)\cdot\left(B+\overline{B}\right)\cdot\left(C+\overline{C}\right)\cdot\overline{D}\\
&= \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\\
&\quad A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+\underline{\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}}+\underline{A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}+\\
&\quad A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}
\end{aligned}$$

(หมายเหตุ ตัวที่ขีดเส้นใต้เป็น minterm ที่ซ้ำ)

5.3 ลดรูปสมการโดยใช้ K-map

AB / CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11		1		
10	1	1	1	1

ดังนั้น OUT = $= \overline{A}\cdot B+\overline{D}$

หมายเหตุ สังเกตว่าข้อนี้ใช้ Boolean algebra จะง่ายกว่า